Hádanka

Funkce počítá počet jedniček v bitovém rozvoji přirozeného čísla. Označme si jako $b(x)$ počet jedničkových bitů čísla x. Pokud $x = 0$, tak očividně $b(x) = 0$. Algoritmus z hádanky je založen na následujícím pozorování:

Pokud je $x > 0$, pak se x a $x - 1$ shodují na $b(x) - 1$ jedničkových bitech.

K tomu, abychom viděli, že pozorování je správné, si stačí představit sčítání čísel ve dvojkové soustavě algoritmem „sčítání pod sebou“. Konkrétně budeme sčítat čísla $x - 1$ a 1

Pokud má x na nejnižším bitu jedničku, pak $x - 1$ musí mít na nejnižším bitu nulu. Čísla x a $x - 1$ se shodují na všech ostatních bitech (protože bitový rozvoj čísla 1 má na těchto bitech nuly), a tedy počet jedniček v bitovém rozvoji x je o jedna větší než počet jedniček v bitovém rozvoji $x - 1$. Algoritmus sčítání v této situaci defakto končí, jenom do výsledku opíšeme zbývající bity z čísla $x - 1$. Situaci odpovídá následující příklad:

$$\begin{array}{ll} \texttt{0100} & x-1 \\ \texttt{0001} & 1 \\ \hline \texttt{0101} & x \end{array}$$

Pokud má x na nejnižším bitu 0, musí mít $x - 1$ na tomto bitu 1. Při sčítání pak přenášíme jedničku do vyššího bitu a algoritmus pokračuje tímto bitem.

Situace je podobná i pro vyšší bity (pro které algoritmus defakto neskončil). Pokud má x na daném bitu nulu, pak $x - 1$ musí mít na tomto bitu jedničku, protože přičítáme jedničku přenesenou z nižšího bitu. Naopak, pokud má x na daném bitu jedničku, pak $x - 1$ musí mít na tomto bitu nulu a algoritmus defakto skončí. Ve všech vyšších bitech se čísla x a $x - 1$ shodují, ve všech nižších bitech má x nulu a $x - 1$ jedničku. Dohromady tedy má x o jednu jedničku více než v kolika jedničkových bitech se x a $x - 1$ shodují. V následujícím příkladu je zvýrazněn bit, kde algoritmus sčítání defakto končí.

$$\begin{array}{ll} \texttt{1{\color{red}0}111} & x-1 \\ \texttt{0{\color{red}0}001} & 1 \\ \hline \texttt{1{\color{red}1}000} & x \end{array}$$