Josefův problém

Postup, který si ukážeme, je založen na následujícím pozorování. Pokud se podíváme na osoby, které přežijí po prvním kole poprav, můžeme si všimnout, že opět dostáváme Josefův problém, pouze je nutné nyní osoby „přečíslovat“. Navíc se počet osob, pro které problém řešíme, zmenší (zhruba) na polovinu. Můžeme tedy problém opakovaně zmenšovat až do triviální situace, kdy zůstane pouze jedna osoba. Ta je je pak přeživším. Ze způsobu přečíslování při každém zmenšení pak odvodíme, jaké číslo tato osoba měla na počátku.

Přeživší osobu pro problém s n lidmi označíme jako $J(n)$. Pokud je $n = 2k$ pro nějaké k (tedy počet osob je sudý), zůstanou po prvním kole poprav osoby $1, 3, 5, 7, \ldots, 2k-1$. Zůstane jich tedy právě k. Navíc je můžeme převést na Josefův problém přečíslováním. Podíváme-li se na následující tabulku,

1	3	5	7	...	$2k-1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že číslo z dolního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a odečteme jedničku. Přečíslování provedeme u všech osob a tedy i u přeživšího. Proto můžeme psát, že

$$J(2k) = 2J(k) - 1. \tag{1}$$

$J(k)$ je číslo přeživšího z Josefova problému odpovídajícímu dolnímu řádku, předchozí vztah ho transformuje do číslování pro původní problém.

Je-li $n = 2k+1$ (n je liche), pak po prvním kole poprav zůstanou osoby $3, 5, 7, 9, \ldots, 2k+1$. Po krátkém pohledu na tabulku

3	5	7	9	...	$2k+1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že tentokrát číslo ze spodního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a přičteme jedničku. Můžeme tedy psát

$$J(2k+1) = 2J(k) + 1. \tag{2}$$

Vztahy (1) a (2) stačí doplnit triviálním $J(1) = 1$.

Nyní musíme pravidla pro přečíslování při zmenšování problému využít pro určení přímého vztahu pro přeživšího člověka. Pro začátek si spočtěme prvních pár čísel do tabulky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

Vidíme, že pokud je počet osob mocninou dvou, přežije vždycky první osoba. Ostatně, lze to vypozorovat i z odvození vztahu (1). Můžeme tedy psát $J(2^m) = 1$.

Pokud počet osob není roven mocnině dvou, vyjádříme jej jako $n = 2^m + l$, kde m je největší číslo takové, že $2^m \leq n$. Na mocninu dvou se n zredukuje po l popravách. První osoba v pořadí za l-tým popraveným má číslo $2l+1$

(popravujeme každého druhého). Zbývající osoby si nyní představíme jako instanci Josefova problému, kde je první osobou právě $2l+1$. Protože počet osob je mocninou dvou, je $2l+1$ i přeživším. Platí tedy, že

$$J(2^m + l) = 2l + 1. \tag{3}$$

Pokud chceme nalézt řešení Josefova problému pro n osob, musíme nalézt největší mocninu dvou menší než n a od n ji odečíst. Rozdíl poté vynásobíme dvěma a přičteme k němu jedničku.